Problemas de Optimización Multiobjetivo para la Selección de Carteras: El Modelo MDRS

Ana Belén Ruiz

Depto. Economía Aplicada (Matemáticas), Universidad de Málaga

September 26, 2017

Selección de carteras

- Una cartera es un conjunto de inversiones en un mercado de valores en el que cotizan N activos, cuyo rendimiento futuro es incierto.
- El modelo clásico de selección de carteras utiliza criterios basados en:
  - ✓ Maximización del rendimiento esperado (media).
  - ✓ Minimización del riesgo de la inversión (varianza del rendimiento u otras medidas del riesgo, como el coeficiente de asimetría, la semi-desviación media absoluta por debajo del rendimiento esperado, valor del riesgo al p%,...).
- El riesgo y el rendimiento esperado se estiman a partir de los valores históricos de la cartera.
- Usualmente, se aproxima la incertidumbre de cada activo de forma individual y se acumulan para obtener una medida de la incertidumbre de cada cartera.

Modelo de Media-Riesgo lateral-Asimetría (MDRS)

R. Saborido, A.B. Ruiz, J.D Bermúdez, E. Vercher, M. Luque (2016), *Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection*, Applied Soft Computing 39, 48-63.

Modelo de Media-Riesgo lateral-Asimetría (MDRS)

Variables

Dados N activos finacieros, una cartera define cuánto debe ser invertido en cada activo i del total de la inversión:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$$

donde x_i representa la proporción del capital invertido en el activo i $(i = 1, ..., N)$.

Restricciones

- ✓ Invertir todo el capital (restricción presupuestaria): $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$.
- ✓ Garantizar la diversificación (l_i y u_i cotas inferior y superior del activo i):

  $$l_i \leq x_i \leq u_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, N.$$
- ✓ Limitar el número de activos en los que se invierte (cardinalidad):

  $$k_l \leq c(\mathbf{x}) \leq k_u,$$

  donde $c(\mathbf{x}) = rang(diag(\mathbf{x}))$ devuelve el nº de activos en la cartera $\mathbf{x}$ con $x_i > 0$, y k_l y k_u son las cotas inferior y superior que se imponen a la cardinalidad.

Modelo de Media-Riesgo lateral-Asimetría (MDRS)

Incertidumbre del rendimiento de la inversión

Dada una cartera $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$, se calculan los rendimientos históricos, $r_t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} r_{it} x_i$, siendo r_{it} el rendimiento del activo i-ésimo en el periodo t.

- Los rendimientos históricos $r_t(\mathbf{x})$ incorporan información implícita sobre las relaciones contemporáneas entre los diferentes activos.
- El rendimiento de $\mathbf{x}$ se aproxima mediante un número fuzzy de tipo LR:

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}} = \{p_l, p_u, c, d\}_{L_\pi, R_\rho},$$

  cuyos parámetros se definen a partir de los percentiles muestrales p_i de $r_t(\mathbf{x})$:
  - $[p_l, p_u]$ define el núcleo ($[p_l, p_u] = \{y | \mu_Q(y) = 1\}$), y c y d son las amplitudes a derecha e izquierda, resp.
  - $\pi, \rho > 0$ definen las funciones de referencia L_π y R_ρ que determinan la función de pertinencia de $\tilde{P}_{\mathbf{x}}$:

$$L_\pi(t) = 1 - t^\pi \text{ y } R_\rho(t) = 1 - t^\rho.$$

Modelo de Media-Riesgo lateral-Asimetría (MDRS)

Incertidumbre del rendimiento de la inversión

Función de pertinencia del número fuzzy $\tilde{P}_{\mathbf{x}} = \{p_l, p_u, c, d\}_{L_\pi, R_\rho}$ de tipo LR:

$$\mu_{\tilde{P}_{\mathbf{x}}}(y) = \begin{cases} L_\pi(\frac{p_l - y}{c}) & \text{if } p_l - c < y \leq p_l, \\ 1 & \text{if } p_l \leq y \leq p_u, \\ R_\rho(\frac{y - p_u}{d}) & \text{if } p_u \leq y < p_u + d, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$\mu_{\tilde{P}_{\mathbf{x}}}(\cdot)$ incorpora, implícitamente, información de la incertidumbre que conlleva la inversión en cada portfolio $\mathbf{x}$.

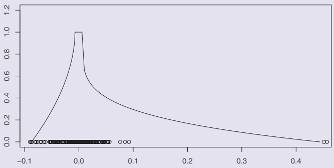


Fig. 1. Plot of the membership function of $\tilde{P}_X$, which has been built using the historical returns on a given allocation X.

Modelo de Media-Riesgo lateral-Asimetría (MDRS)

Funciones objetivo

Las funciones objetivo se establecen a partir de los momentos posibilisticos de $\tilde{P}_{\mathbf{x}}$:

- ✓ Rendimiento esperado (a maximizar):

$$\bar{E}(\tilde{P}_{\mathbf{x}}) = \frac{p_u + p_l}{2} + \frac{d}{2}\frac{\rho}{\rho+1} - \frac{c}{2}\frac{\pi}{\pi+1}$$

- ✓ Riesgo lateral (a minimizar):

$$w(\tilde{P}_{\mathbf{x}}) = p_u - p_l + d\frac{\rho}{\rho+1} + c\frac{\pi}{\pi+1}$$

- ✓ Coeficiente de asimetría (a maximizar):

$$S(\tilde{P}_{\mathbf{x}}) = \frac{\mu_3(\tilde{P}_{\mathbf{x}})}{w(\tilde{P}_{\mathbf{x}})^3}$$

donde $\mu_3(\tilde{P}_{\mathbf{x}}) = \bar{E}((\tilde{P}_{\mathbf{x}} - \bar{E}(\tilde{P}_{\mathbf{x}}))^3)$ (tercer momento posibilistico de $\tilde{P}_{\mathbf{x}}$).

Formulación del modelo MDRS

$$\begin{array}{lll}
\max & \bar{E}(\tilde{P}_{\mathbf{x}}) & \text{(Rendimiento esperado)} \\
\min & w(\tilde{P}_{\mathbf{x}}) & \text{(Riesgo lateral)} \\
\max & S(\tilde{P}_{\mathbf{x}}) & \text{(Asimetría)} \\
\text{s.a.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1, & \text{(Restricción presupuestaria)} \\
& k_l \leq c(\mathbf{x}) \leq k_u, & \text{(Restricción de cardinalidad)} \\
& 0 \leq l_i \leq x_i \leq u_i, & \text{(Diversificación)} \\
& \text{para } i = 1, 2, ..., N. &
\end{array}$$

Observaciones

- La evaluación de las funciones objetivo implica trabajar con los percentiles del rendimiento $\Rightarrow$ problema no-lineal y no-convexo.
- La función $c(\mathbf{x})$ es cuasi-cóncava (rango de matriz diag.) $\Rightarrow$ problema NP-duro.
- Datos:
  - ✓ Rendimientos semanales de 33 activos del IBEX35 (Enero 2013 – Marzo 2016), observados en $T = 165$ periodos (semanas).
  - ✓ Tamaño de las carteras (cardinalidad): $k_l = k_u = k = 9$ activos.
  - ✓ Cotas para asegurar la diversificación: $l_i = 0$ y $u_i = 0.3$, $\forall i = 1, \ldots, 33$.

Algoritmos de optimización multiobjetivo para resolver problemas de selección de carteras

- Dificultad:
  - ✓ Manejo de las restricciones propias de los problemas para la selección de carteras.
  - ✓ Incertidumbre: trabajar con números fuzzy que estiman la incertidumbre del rendimiento de la cartera.
- Simplificación del modelo: optimizan uno o dos objetivos e incorporan el resto como restricciones, o utilizan alguna escalarización que convierta el modelo multiobjetivo en uno monoobjetivo.
- Diseñar algoritmos heurísticos específicos en función del modelo de selección de carteras considerado, usando operadores genéticos genéricos e incorporando un mecanismo de "reparación" para asegurar que todas las restricciones se cumplen.
- Otra opción: diseñar operadores genéticos adaptados al modelo que aseguren la generación de soluciones factibles e incorporarlos a algoritmos metaheurísticos.

Algoritmos EMO empleados para resolver el modelo MDRS

- NSGA-II [1].
- MOEA/D [2].
- Global WASF-GA [3].
  - ✓ Considera un conjunto de subproblemas de optimización con una única función objetivo: la función de logro de Wierzbicki [4].
  - ✓ Clasificación en frentes de las soluciones de acuerdo a los valores que cada solución toma para la función de Wierzbicki, usando un conjunto de vectores de pesos.
  - ✓ Se consideran simultáneamente los vectores utopía y nadir para cubrir mejor la frontera eficiente.

[1] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan (2002), *A fast and elitist multiobjectivegenetic algorithm: NSGA-II*, IEEE Trans. Evol. Comput. 6 (2), 182–197.
[2] Q. Zhang, H. Li (2007), *MOEA/D: a multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition*, IEEE Trans. Evol. Comput. 11 (6), 712–731.
[3] A.B. Ruiz, R. Saborido, M. Luque (2016), *Global WASF-GA: An Evolutionary Algorithm in Multiobjective Optimization to approximate the whole Pareto Optimal Front*, Evolutionary Computation, 25(2): 309-349.
[4] A.P. Wierzbicki, *The use of reference objectives in multiobjective optimization*, in: G. Fandel, T. Gal (Eds.), Multiple Criteria Decision Making, Theory and Applications, Vol. 177 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1980, pp. 468–486.

Operadores adaptados para el modelo MDRS

- ✓ Objetivo: mantener la factibilidad de las soluciones.
- ✓ Dificultad: generar carteras que verifiquen la condición de cardinalidad, esto es, generar nuevas carteras que inviertan simpre en el mismo número de activos.

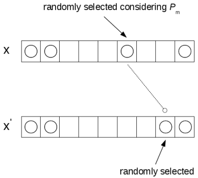
Representación real

Dada una cartera $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$, si $x_i > 0$ se invierte en el activo i en proporción x_i, y si $x_i = 0$, la cartera no invierte en el activo i:

- El conjunto de activos en los que se invierte $\mathbf{x}$ se denota por:
$$I_{\mathbf{x}}^{+} = \{i = 1, ..., N : x_i > 0\}$$
- El conjunto complementario se denota por:
$$I_{\mathbf{x}}^{0} = \{i = 1, ..., N : x_i = 0\}$$

Mutación

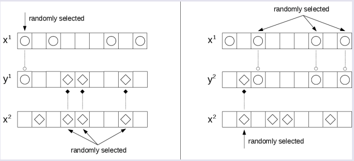
- Dada una cartera $\mathbf{x}$, se genera una nueva cartera $\mathbf{x}'$, en la que la se intercambian aleatoriamente las proporciones de dos activos de $I_{\mathbf{x}}^{+}$.
- Probabilidad de mutación: $P_m = 1/k$, siendo k la cardinalidad.
- La cartera mutada conserva las condiciones de cardinalidad y presupuestaria, y la diversificación.



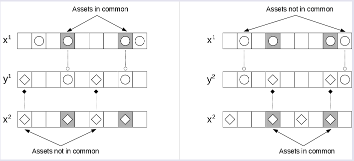
Recombinación

Dependiendo de los activos que intervienen en cada cartera padre $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$, se distingen 3 casos para generar dos carteras hija $\mathbf{y}^1$ y $\mathbf{y}^2$.

CASO 1: $I^+_{\mathbf{x}^1} \cap I^+_{\mathbf{x}^2} = \varnothing$ (no invierten en activos en común)



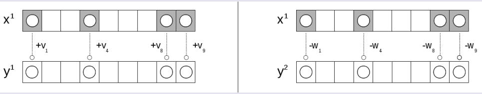
CASO 2: $0 < \#(I^+_{\mathbf{x}^1} \cap I^+_{\mathbf{x}^2}) < k$ (invierten en activos en común, pero no todos)



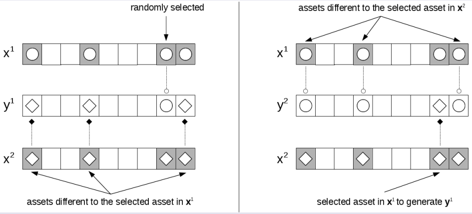
Recombinación

CASO 3: $\#(I^+_{\mathbf{x}^1} \cap I^+_{\mathbf{x}^2}) = k$ (invierten en los mismos activos)

- Caso 3.1: $\#(I^+_{\mathbf{x}^1} \cap I^+_{\mathbf{x}^2}) = k$ and $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2$ (son las mismas carteras)



- Caso 3.2: $\#(I^+_{\mathbf{x}^1} \cap I^+_{\mathbf{x}^2}) = k$ y $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ (son distintas carteras)



Reparación

- Las carteras hijas generadas con el operador de recombinación satisfacen las restricciones de cardinalidad y diversificación, pero puede que no verifiquen la restricción presupuestaria.
- Inicialmente, se normalizan las proporciones de los activos que participan en cada cartera.
- Posteriormente, si la inversión realizada en algún/os activos no se encuentra/n entre las correspondientes cotas inferior o superior, se aplica un criterio sencillo de reparto para compensar los excesos y/o defectos en esos activos.